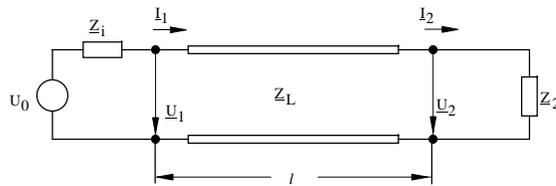


## Verbindungstechnik

### 1.1 Leitungen mit linearen Abschlusswiderständen

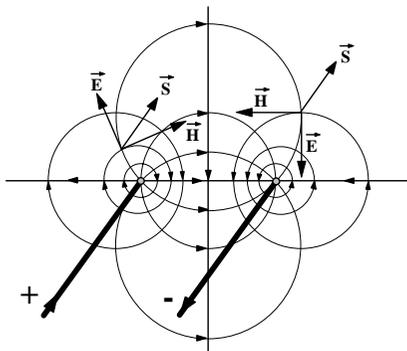
Verbindungsleitungen zwischen und in integrierten Schaltungen haben die elementar wichtige Funktion, Information und Energie zu übertragen. Leitungen sind Vierpole. Leitungen können nur in Sonderfällen durch ein Ersatzschaltbild mit konzentrierten Bauelementen dargestellt werden. Es gelten nicht mehr die Vereinfachungen des quasistationären Falls. Man spricht von einem Vierpol mit verteilten Parametern, um den Unterschied zu dem mit konzentrierten Bauelementen herauszustellen.

Eine besonders geläufige Form einer Leitung besteht aus zwei parallelen Drähten nach Bild 1.1, deren Eigenschaften sich längs der Leitung nicht ändern. In diesem Fall spricht man von einer homogenen Leitung.



**Bild 1.1** Schema einer homogenen Leitung mit der Länge  $l$  und dem komplexen Wellenwiderstand  $Z_L$ . Es sind  $Z_i$  der komplexe Innenwiderstand des Generators und  $Z_2$  der komplexe Lastwiderstand oder die Lastimpedanz

Der Strom fließt in dem einen Draht hin und in dem anderen zurück. Das elektrische und magnetische Feld in der Umgebung des Leitungspaares ist in Bild 1.2 dargestellt. Es gilt unter der Voraussetzung, daß der Abstand der Drähte klein gegenüber der Wellenlänge ist, die durch Gl. (1.11) definiert werden wird.



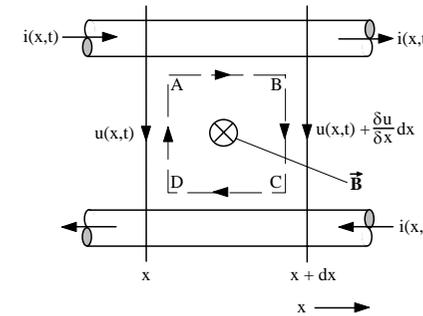
**Bild 1.2** Elektrisches Feld  $\vec{E}$ , magnetisches Feld  $\vec{H}$  und Poynting'scher Vektor  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  einer homogenen Leitung

Die Drähte haben einen ohmschen Widerstand. Für Hin- und Rückleitung ist

$$R = R' \cdot l, \quad (1.1)$$

wobei  $l$  die einfache Länge der Leitung zwischen Eingang und Ausgang ist und  $R'$  der Widerstandsbelag, d.h. der Widerstand pro Längeneinheit.

In einem Leitungsabschnitt der Länge  $x$  nach Bild 1.3 ist das Induktionsgesetz anzuwenden. Ströme und Spannung hängen von der Raumkoordinate  $x$  und von der Zeit  $t$  ab;  $i(x,t)$  und  $u(x,t)$ .



**Bild 1.3** Spannungsabfall entlang eines Leitungselements der Länge  $dx$

Ein geschlossener Umlauf über die Punkte A, B, C, D in Bild 1.3 ergibt

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = i \frac{R'}{2} dx + \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + i \frac{R'}{2} dx - u, \quad (1.2)$$

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{A} = -\frac{d\phi}{dt} = -L' dx \frac{di}{dt},$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R' i + L' \frac{di}{dt}.$$

$L'$  ist der Induktivitätsbelag d.h. die auf die Länge bezogene Induktivität. Das Dielektrikum zwischen den Drähten habe einen endlichen spezifischen Leitwert. Der Ableitungsbelag, d.h. der Leitwert pro Längeneinheit ist  $G'$ . Der entsprechende Kapazitätsbelag zwischen den Drähten ist  $C'$ .

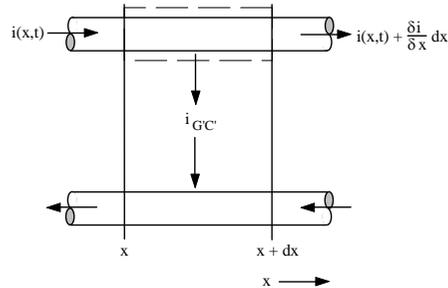
Das erste Kirchhoff'sche Gesetz oder die Forderung nach Kontinuität des Stromes liefert nach Bild 1.4

$$\left( i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) + u G' dx + C' dx \frac{du}{dt} = i, \quad (1.3)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G' u + C' \frac{du}{dt}.$$

Die beiden Differentialgleichungen 1.2 und 1.3 beschreiben eine homogene Leitung, deren Beläge  $L'$ ,  $R'$ ,  $C'$  und  $G'$  ortsunabhängig sind. Nur homogene Leitungen sollen im Folgenden betrachtet

werden. Ferner sei weiterhin angenommen, dass die Beläge auch unabhängig von der Frequenz und von den Amplituden der Ströme und Spannungen sind, dass also die Leitung durch einen linearen Vierpol dargestellt werden kann.



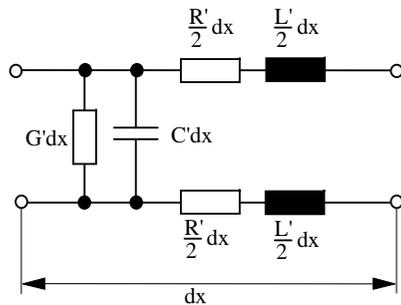
**Bild 1.4** Stromabfall durch den Quersstrom  $i_{G'C'}$  eines Leitungselements

Für rein sinusförmige Ströme und Spannungen wird aus Gln. (1.2 und 1.3) mit den Ansätzen  $u(t) = \underline{U} e^{j\omega t}$  und  $i(t) = \underline{I} e^{j\omega t}$ :

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = (R' + j\omega L') \cdot \underline{I} \quad (1.4)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = (G' + j\omega C') \cdot \underline{U} \quad (1.5)$$

Das zugehörige Ersatzschaltbild eines Leitungsabschnittes  $dx$  ist in Bild 1.5 zu sehen.



**Bild 1.5** Ersatzschaltbild eines Leitungselements

Durch Differentiation nach  $x$  von Gl. (1.4)

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (R' + j\omega L') \frac{\partial I}{\partial x}$$

und durch Einsetzen von Gl.(1.5) gewinnt man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, in der nur die Spannung vorkommt. Die Differentialgleichung der homogenen Leitung lautet also:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \gamma^2 U \quad (1.6)$$

Sie hat die mathematische Form einer eindimensionalen Wellengleichung. Die komplexe Größe

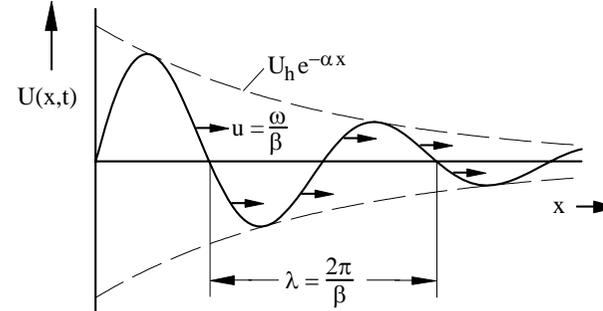
$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta \quad (1.7)$$

wird Ausbreitungskoeffizient genannt.  $\alpha$  ist der Dämpfungsbelag und  $\beta$  der Phasenbelag. Die Lösung der Wellengleichung (1.6) setzt sich aus einer hinlaufenden und reflektierten Welle zusammen.

$$u(x,t) = \underline{U}(x) \cdot e^{j\omega t} = \underline{U}_h \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j(\omega t - \beta x)} + \underline{U}_r \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j(\omega t + \beta x)} \quad (1.8)$$

Der erste Term mit der Amplitude  $\underline{U}_h$  gehört zu einer in positiver  $x$ -Richtung fortschreitenden Welle am Eingang bei  $x = 0$ , die oft hinlaufende Welle genannt wird. Denn ein Beobachter, der sich mit gleicher Geschwindigkeit und Richtung wie die Welle bewegt, muss immer den gleichen Bezugspunkt der Welle, d.h. die gleiche Phase sehen. Die konstante Phase der hinlaufenden Welle nach Gl. (1.8), die der Beobachter sieht, ist

$$\omega t - \beta x = \text{const.} \quad (1.9)$$



**Bild 1.6** Skizze zur Ausbreitung einer gedämpften Welle

Die Phasengeschwindigkeit der Welle bzw. des Beobachters wird damit

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (1.10)$$

Sie ist erwartungsgemäß positiv, da sich die Welle in Richtung der positiven  $x$ -Achse bewegt. Eine hinlaufende Welle ist in Bild 1.6 skizziert. Sie wird in Ausbreitungsrichtung gedämpft. Die Hüllkurve der Schwingung wird durch den Faktor  $\exp(-\alpha x)$  beschrieben.

Die Wellenlänge ergibt sich aus der Forderung, dass auf der Strecke  $x = \lambda$  der komplexe Zeiger der fortschreitenden Welle einmal um  $2\pi$  dreht,  $\beta \lambda = 2\pi$  oder

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (1.11)$$

Setzt man Gl. (1.11) in Gl. (1.10) ein, so erhält man die Phasengeschwindigkeit einer Welle als das Produkt aus ihrer Wellenlänge und Frequenz

$$u = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda \quad (1.12)$$

Die gleichen Überlegungen gelten für die reflektierte Welle mit der Amplitude  $\underline{U}_r e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)}$ , die sich in negativer x-Richtung ausbreitet.

Die bisherigen Betrachtungen galten nur den Spannungen. Die Differentialgleichung der Ströme und ihr Lösungsansatz haben die gleiche mathematische Form wie die der Spannungen. Die Beziehung zwischen den Strömen und Spannungen der hinlaufenden und reflektierten Welle erhält man durch Einsetzen von

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_h e^{-\gamma x} + \underline{I}_r e^{+\gamma x} \quad (1.13)$$

und Gl. (1.8) in Gl. (1.4):

$$(R' + j\omega L')(\underline{I}_h e^{-\gamma x} + \underline{I}_r e^{+\gamma x}) = \gamma(\underline{U}_h e^{-\gamma x} - \underline{U}_r e^{+\gamma x}) \quad (1.14)$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$e^{-\gamma x}(R' + j\omega L') \frac{\underline{I}_h}{\gamma} = e^{-\gamma x} \underline{U}_h \quad \text{und}$$

$$-e^{+\gamma x}(R' + j\omega L') \frac{\underline{I}_r}{\gamma} = e^{+\gamma x} \underline{U}_r \quad \text{sind, wenn also}$$

$$\frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = \underline{Z}_L = -\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r} \quad (1.15)$$

wobei

$$\underline{Z}_L = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (1.16)$$

der Wellenwiderstand der Leitung ist. Damit lassen sich Strom und Spannung längs der Leitung in der Form angeben

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_h e^{-\gamma x} + \underline{U}_r e^{+\gamma x} \\ \underline{I}(x) &= (\underline{U}_h e^{-\gamma x} - \underline{U}_r e^{+\gamma x}) \frac{1}{\underline{Z}_L} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Im Allgemeinen sind eine vorwärts und eine rückwärts laufende Welle notwendig, um Grenzbedingungen zu erfüllen. Beispielsweise gilt für Spannung und Strom an einem Lastwiderstand  $\underline{Z}_2$  bei  $x = l$  nach Bild 1.1

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \Big|_{x=l} = \underline{Z}_L \frac{\underline{U}_h e^{-\gamma l} + \underline{U}_r e^{+\gamma l}}{\underline{U}_h e^{-\gamma l} - \underline{U}_r e^{+\gamma l}} = \underline{Z}_L \frac{1 + \underline{r}_1 e^{2\gamma l}}{1 - \underline{r}_1 e^{2\gamma l}} = \underline{Z}_L \frac{1 + \underline{r}_2}{1 - \underline{r}_2} \quad (1.18)$$

Der Last- oder Abschlusswiderstand kann durch den Wellenwiderstand  $\underline{Z}_L$ , durch den Ausbreitungskoeffizienten  $\gamma$  und durch das Verhältnis  $\underline{r}_1$  der reflektierten und hinlaufenden Wellenamplituden am Eingang bestimmt werden. Das Verhältnis

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_h} \quad (1.19)$$

wird Reflexionsfaktor am Eingang genannt. Der Reflexionsfaktor am Ausgang sei entsprechend

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_1 e^{2\gamma l} \quad (1.20)$$

Er kann nach Gl. 1.18 durch den Lastwiderstand und den Wellenwiderstand ausgedrückt werden:

$$\underline{r}_2 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L} \quad (1.21)$$

Ist der Lastwiderstand  $\underline{Z}_2$  gleich dem Wellenwiderstand  $\underline{Z}_L$ , so werden die Reflexionsfaktoren  $\underline{r}_2$  und  $\underline{r}_1$  zu Null. Dann existiert nur eine vorwärtslaufende Welle, deren Energie bei einer verlustlosen Leitung ganz in dem Lastwiderstand umgesetzt wird. Für  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_L$  spricht man von einer am Ausgang angepassten Leitung.

Die Signale am Eingang und Ausgang einer homogenen verlustlosen Leitung, die von einem Spannungssprung eines Generators mit der inneren Impedanz  $\underline{Z}_i = \underline{Z}_L$  angesteuert wird, sind in Bild 1.7 gezeigt.

Die Amplituden der vorwärts und rückwärts laufenden Wellen können durch die Spannung und den Strom am Ausgang ausgedrückt werden. Aus Gl. (1.17) gewinnt man für  $x = l$

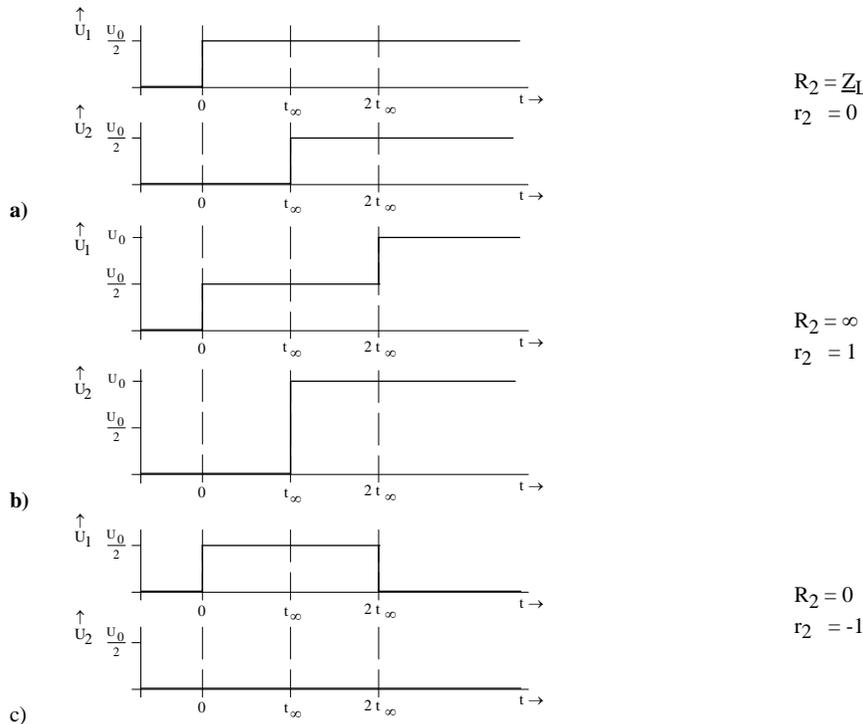
$$\underline{U}_h = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_L \underline{I}_2) e^{\gamma l} \quad , \quad (1.22)$$

$$\underline{U}_r = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_L \underline{I}_2) e^{-\gamma l} \quad .$$

Entsprechend findet man die Eingangsspannung und den Eingangsstrom für  $x = 0$ :

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_L \underline{I}_2) e^{\gamma l} + \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_L \underline{I}_2) e^{-\gamma l} \quad (1.23)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_L} \cdot \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_L \underline{I}_2) e^{\gamma l} - \frac{1}{\underline{Z}_L} \cdot \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_L \underline{I}_2) e^{-\gamma l}$$



**Bild 1.7** Spannungsverläufe an einer homogenen verlustlosen Leitung, die durch einen Spannungssprung eines angepassten Generators,  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_L$ , angeregt wird. a) Anpassung; b) Leerlauf; c) Kurzschluss

Nach Zusammenfassung der zu  $\underline{U}_2$  und  $\underline{I}_2$  gehörenden Funktionen und mit  $\cosh \gamma l = 0,5[\exp(\gamma l) + \exp(-\gamma l)]$  und  $\sinh \gamma l = 0,5[\exp(\gamma l) - \exp(-\gamma l)]$  entstehen die Leitungsgleichungen in der Form der Kettenmatrix A

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cosh \gamma l + \underline{Z}_L \underline{I}_2 \sinh \gamma l \quad (1.24)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_2 \frac{1}{\underline{Z}_L} \sinh \gamma l + \underline{I}_2 \cosh \gamma l \quad (1.25)$$

Die betrachtete homogene Leitung ist ein linearer Vierpol. Es ist offensichtlich, dass sie umkehrbar ist. Daher muss die Determinante der Kettenmatrix 1 sein:

$$\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \cosh^2 \gamma l - \sinh^2 \gamma l \equiv 1. \quad (1.26)$$

Eine homogene Leitung ist zudem widerstandssymmetrisch

$$A_{11} = A_{22}. \quad (1.27)$$

Das Betriebsübertragungsmaß einer homogenen Leitung, die am Eingang und Ausgang angepasst ist, bei der also  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_a$  sind, ist

$$a + jb = \gamma l = \alpha l + j\beta l \quad (1.28)$$

Ein umkehrbarer und widerstandssymmetrischer Vierpol kann also durch zwei "Wellenparameter", das Betriebsübertragungsmaß und den Wellenwiderstand vollständig beschrieben werden. Sind diese Wellenparameter einer gegebenen Leitung unbekannt, so lassen sie sich leicht durch eine Kurzschluss- und eine Leerlaufmessung bestimmen. Nach den Gln. (1.24 und 25) ist der Kurzschlusswiderstand

$$\left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} = W_{1K} = \underline{Z}_L \tanh \gamma l \quad (1.29)$$

und der Leerlaufwiderstand

$$\left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{I}_2=0} = W_{1L} = \underline{Z}_L \coth \gamma l \quad (1.30)$$

Der Wellenwiderstand ist also das geometrische Mittel aus Kurzschluss- und Leerlaufwiderstand

$$\underline{Z}_L = \sqrt{W_{1K} \cdot W_{1L}} \quad (1.31)$$

Das Übertragungsmaß gewinnt man aus

$$\tanh \gamma l = \sqrt{\frac{W_{1K}}{W_{1L}}} \quad (1.32)$$

Der Ausbreitungskoeffizient  $\gamma = \alpha + j\beta$  nach Gl. (1.7) kann in eine physikalisch leichter interpretierbare Form gebracht werden. Nach einigen Zwischenrechnungen ergibt sich mit den praktischen Abkürzungen

$$\frac{R'}{\omega L'} = \sinh \delta_R \quad , \quad \frac{G'}{\omega C'} = \sinh \delta_G \quad (1.33)$$

der Dämpfungsbelag

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{R'}{\sqrt{L'/C'}} + G' \sqrt{\frac{L'}{C'}} \right] \frac{1}{\cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2}} \quad (1.34)$$

und der Phasenbelag

$$\beta = \omega \sqrt{L'C'} \cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2} \quad (1.35)$$

Für drei wichtige Leitungstypen soll der Ausbreitungskoeffizient diskutiert werden:

1. verlustlose Leitung,
2. verzerrungsfreie Leitung mit Verlusten,
3. Leitung mit geringen Verlusten.

Im 1. Fall einer verlustlosen Leitung mit

$R' = 0, G' = 0$  gilt

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = \omega\sqrt{L'C'} \quad . \quad (1.36)$$

In diesem Fall ist die Phasengeschwindigkeit einer Welle nach Gl. (1.10) für alle Frequenzen gleich groß.

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\mu_r\epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \quad , \quad (1.37)$$

wobei  $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Die Phasengeschwindigkeit ist  $u = c_0/\sqrt{\mu_r\epsilon_r}$  falls das elektrische und das magnetische Feld durch die gleichen Flächen begrenzt werden, bzw. den gleichen Raum einnehmen.

Die einfache Laufzeit einer Welle zwischen Eingang und Ausgang der Leitung ist

$$t_\infty = \frac{l}{u} = \sqrt{L'C'} \cdot l \quad . \quad (1.38)$$

Als Gruppenlaufzeit der Leitung definiert man:

$$\vartheta = \frac{d}{d\omega}(\beta \cdot l) \quad (1.39)$$

Für eine verlustlose Leitung ist also  $\vartheta = t_\infty$  und damit frequenzunabhängig. Wellen verschiedener Frequenzen, die am Eingang einer Leitung mit der gleichen Phasengeschwindigkeit loslaufen, werden am Ausgang ohne eine Änderung ihrer Phasenunterschiede gleichzeitig eintreffen. Aus diesen Gründen erscheint ein Impuls, der durch eine Summe von Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz und Phase dargestellt werden kann, unverzerrt am Ausgang. Eine homogene verlustlose Leitung überträgt Impulse verzerrungsfrei.

Der 2. Fall einer verzerrungsfreien Leitung mit Verlusten aber mit konstanter Gruppenlaufzeit kann verwirklicht werden, wenn nach Gl. (1.33) die Argumente gleich sind

$$\delta_R = \delta_G \quad ,$$

d.h. wenn die Zeitkonstanten im Längs- und Querglied eines Leitungsabschnittes gleich sind

$$\tau = \frac{L'}{R'} = \frac{C'}{G'} \quad . \quad (1.40)$$

Mit dieser Bedingung liefern Gln. (1.34 und 35)

$$\alpha = \sqrt{R'G'} \quad , \quad \beta = \omega\sqrt{L'C'} \quad . \quad (1.41)$$

In technischen Koaxialkabeln ist die Bedingung (1.40) meist nicht erfüllt, da

$$\sqrt{\frac{L'}{C'}} \ll \sqrt{\frac{R'}{G'}} \quad . \quad (1.42)$$

In einem koaxialen Kupferkabel mit einem Durchmesser des Innen- und Außenleiters  $d = 0,8$  mm,  $D = 16$  mm,  $R' = 0,74$  m $\Omega$ /cm,  $L' = 6$  nH/cm,  $G' = 10$  pS/cm,  $C' = 0,37$  pF/cm ist

$$\sqrt{\frac{L'}{C'}} = 127 \Omega \ll \sqrt{\frac{R'}{G'}} = 8602 \Omega \quad .$$

Da der Kupferwiderstandsbelag festliegt, könnte Verzerrungsfreiheit erzielt werden durch eine Erhöhung des Ableitungsbelags auf  $G' = 4,5$  mS/km. Dadurch würde aber die Dämpfung nahezu auf den doppelten Wert ansteigen:

$$\alpha = R' / \sqrt{L'/C'} = 0,58 \text{ Np/km.}$$

Im 3. Fall einer Leitung mit geringen Verlusten

$$\frac{R'}{\omega L'} \ll 1 \quad , \quad \frac{G'}{\omega C'} \ll 1 \quad (1.43)$$

d.h. mit

$$\cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2} \approx 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{R'}{\omega L'} - \frac{G'}{\omega C'} \right)^2 \approx 1$$

liefern die Gln. (1.34 und 35) die wichtigen Näherungen

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left( \frac{R'}{\sqrt{L'/C'}} + G' \sqrt{\frac{L'}{C'}} \right) \quad , \quad \beta \approx \omega\sqrt{L'C'} \quad . \quad (1.44)$$

Gegen höhere Frequenzen sind also der Dämpfungsbelag  $\alpha$  und die Gruppenlaufzeit  $\vartheta$  frequenzunabhängig (wenn die Leitungsbeläge frequenzunabhängig bleiben).

Neben dem Ausbreitungskoeffizienten ist auch der Wellenwiderstand nach Gl. (1.16) komplex und frequenzabhängig.

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \cdot \sqrt{\frac{1 - j \frac{R'}{\omega L'}}{1 - j \frac{G'}{\omega C'}}} \quad . \quad (1.45)$$

Für  $G' \neq 0, R' \neq 0$  findet man aus Gl. (1.45) in den Grenzfällen  $f = \infty$  und  $f = 0$  reelle Wellenwiderstände

Ergänzung zu Design digitaler Schaltkreise

$$Z_{L\infty} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad \text{für } f \rightarrow \infty \quad , \quad (1.46)$$

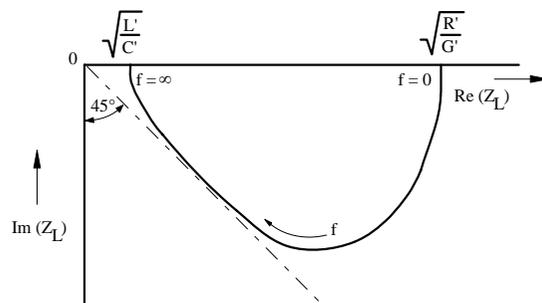
$$Z_{L0} = \sqrt{\frac{R'}{G'}} \quad \text{für } f \rightarrow 0 \quad . \quad (1.47)$$

Bei mittleren Frequenzen ist die Phase des Wellenwiderstandes nahezu  $-45^\circ$ .

Für den technisch interessanten Fall

$$\frac{G'}{\omega C'} \ll \frac{R'}{\omega L'} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{L'}{C'}} \ll \sqrt{\frac{R'}{G'}} \quad (1.48)$$

gilt die Skizze der Ortskurve in Bild 1.8. Die Phase des Wellenwiderstandes bleibt negativ.



**Bild 1.8** Ortskurve des Wellenwiderstandes einer homogenen Leitung mit  $\sqrt{L'/C'} \ll \sqrt{R'/G'}$

Für  $G' = 0$  ergibt sich die einfache Formel

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \cdot \sqrt{1 - j \frac{R'}{\omega L'}} \quad . \quad (1.49)$$

Eine weitere Vereinfachung von Gl. (1.49) ist gegen sehr niedrige Frequenzen möglich

$$Z_L \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \cdot \sqrt{-j \frac{R'}{\omega L'}} = \sqrt{\frac{R'}{2\omega C'}} \cdot (1 - j) \quad . \quad (1.50)$$

Gegen sehr niedrige Frequenzen wird sich also die Ortskurve des Wellenwiderstandes für  $G'=0$  einer Geraden asymptotisch nähern, die einen Winkel von  $-45^\circ$  mit der Abszisse bildet.